BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Interpolasi

Dalam suatu kondisi tertentu suatu fungsi memerlukan suatu fungsi yang lebih sederhana untuk mendekati atau menghampiri suatu fungsi dalam suatu komputasi numerik. Misal suatu fungsi f hanya diketahui nilainya di titik-titik $T_i \in [a,b]$, $1 \le i \le n$, dan yang diinginkan adalah nilai fungsi di titik $\hat{T} \in [a,b]$ dengan $\hat{T} \neq T_i$, $1 \le i \le n$. Salah satu cara pemecahan adalah dengan mngkonstruksi suatu fungsi P yang menginterpolasi data yang diketahui.

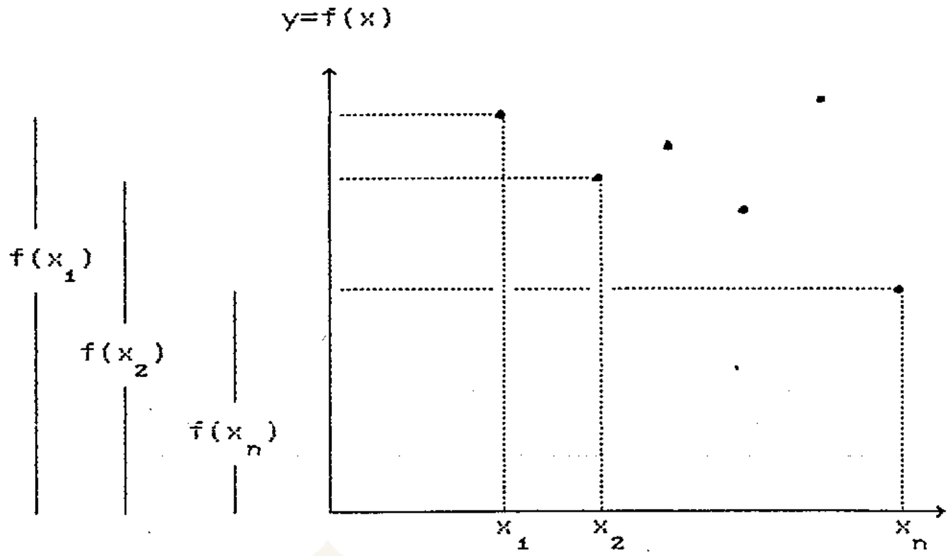
Penentuan fungsi hampiran P yang akan menghampiri f, tergantung pada masalah yang sedang dihadapi. Fungsi hampiran P dapat berupa polinomial, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial dan sebagainya. Bentuk polinomial adalah bentuk yang biasa dipilih untuk fungsi hampiran P, karena lebih sederhana dan bentuk inilah yang digunakan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Untuk memperjelas bahasan tentang interpolasi polinomial akan dibahas terlebih dahulu tentang interpolasi linier.

2.1.1. Interpolasi Linier

Data teknik atau fungsi-fungsi matematika walaupun mempunyai hubungan matematikanya, biasanya lebih sering dinyatakan dalam bentuk tabel. Tabel tersebut berupa kumpulan suatu peubah bebas yang diskret misalnya: x_1, x_2, ..., x_n yang mempunyai hubungan dengan suatu kumpulan nilai-nilai fungsi : $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. x_i (i = 1, 2, ..., n) disebut argumen dari fungsi.

Jika dibutuhkan nilai sebuah fungsi dari sebuah nilai argumen yang bukan anggota dari argumen-argumen yang ditabelkan, maka beberapa metode harus didapat untuk memperkirakan nilai fungsi tersebut dari argumen-argumen dan nilai-nilai fungsi yang ditabelkan.

Ada sejumlah data x_i (i = 1, 2, ... n) dan setiap data x_i berhubungan dengan data lain, y_i. Data y_i dianggap sebagai fungsi x_i, $y_i = f(x_i)$. Dalam koordinat salib sumbu data tersebut digambar seperti gambar 2.1.

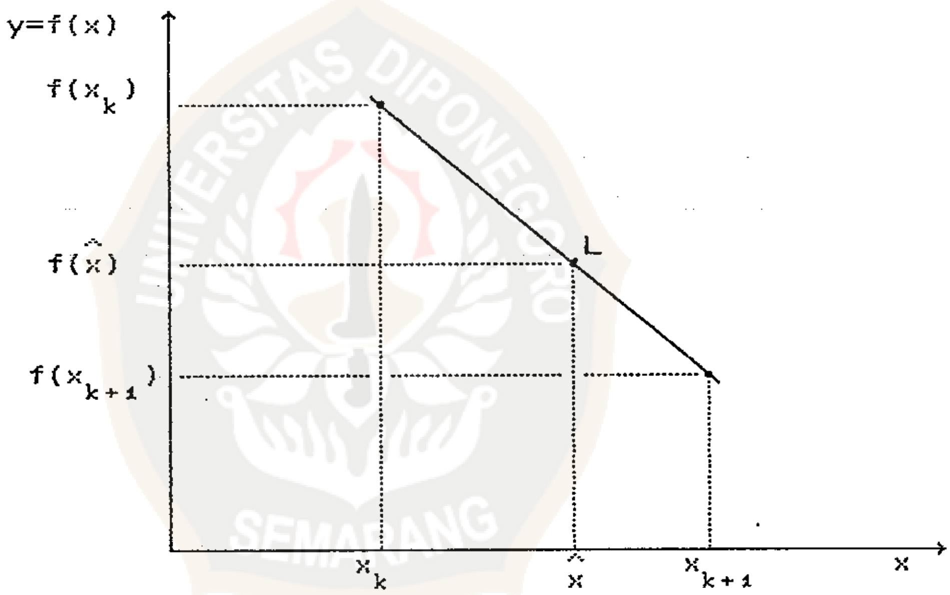


Gambar 2.1. Kumpulan Data

Titik ke i dalam gambar 2.1 mempunyai koordinat $(x_i, f(x_i))$. Kalau dianggap $x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n$, nilai-nilai $f(x_i)$ tidak tentu mempunyai nilai berurutan, seperti terlihat dalam gambar 2.1. Sekarang dengan diberikan nilai $x = \hat{x}$ yang terletak dalam dua nilai x, misalnya x_k dan x_{k+1} $(x_k \leq \hat{x} \leq x_{k+1})$, akan dicari nilai $f(\hat{x})$.

Dalam mengerjakan soal ini tentu dapat diasumsikan bahwa ada beberapa fungsi yang dapat melalui dua nilai x, dengan $\hat{x}$ ada di antara keduanya (seperti garis lurus, parabola atau tergantung ada jenis interpolasi yang diambil). Kesahihan dari asumsi yang diambil tergantung dari bagaimana menerjemahkan data yang ada dalam hubungannya dengan fungsi yang diasumsikan. Kalau diasumsikan fungsinya linear, interpolasinya disebut Interpolasi Linear.

Secara geometri interpolasi linear digambar sebagai sebuah segmen garis lurus yang menghubungkan titik-titik $(x_k, f(x_k))$ dan $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Kemudian dicari nilai $f(\hat{x})$ lewat garis lurus tersebut dengan bantuan $\hat{x}$ (yang terletak antara x_k dan x_{k+1}). Proses tersebut diperlihatkan pada gambar 2.2 dengan L sebagai garis lurus yang menghubungkan $(x_k, f(x_k))$ dan $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$.



Gambar 2.2. Interpolasi Linier

Persamaan garis yang menghubungkan $(x_k, f(x_k))$ dan $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ adalah :

$$f(\hat{x}) - f(x_k) = \frac{(\hat{x} - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) \qquad \text{.......(2.1)}$$

sehingga

$$\boxed{f(\hat{x}) = f(x_k) + \frac{(\hat{x} - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)} (f(x_{k+1}) - f(x_k))}$$

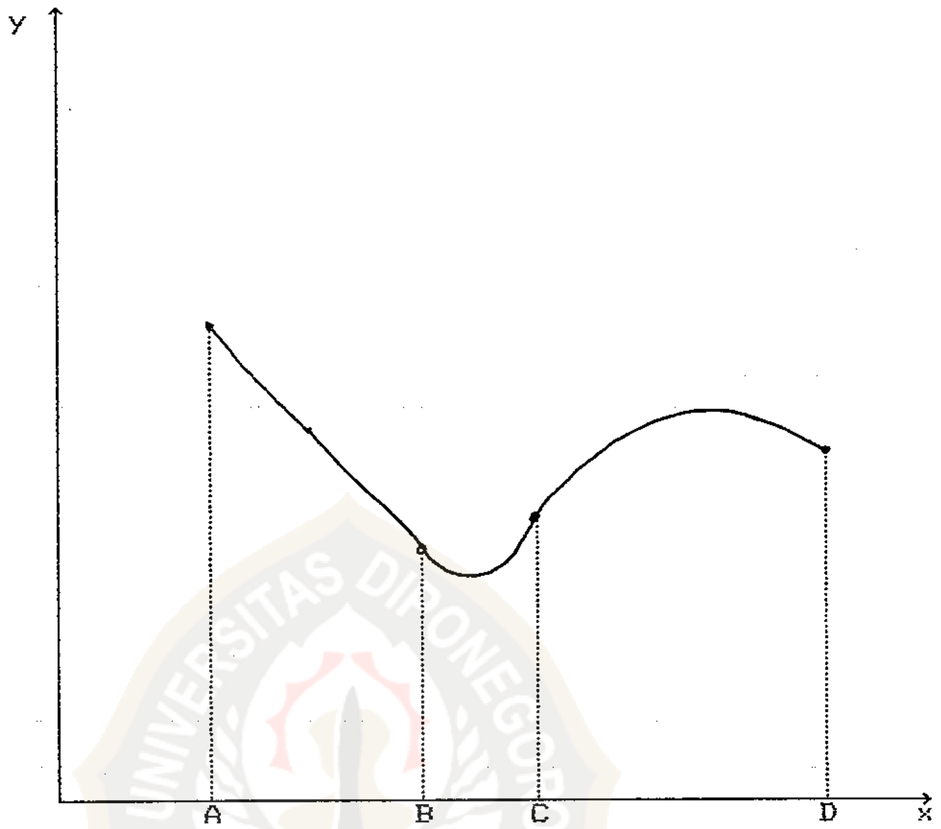
.......(2.2)

Persamaan (2.2) adalah rumus Interpolasi Linear

2.1.2. Interpolasi Polinomial

Interpolasi Linear yang telah dibahas sebelumnya hanya cukup akurat hasilnya jika fungsi sebenarnya mendekati linear atau linear dan ukuran jangkauannya dalam tabel cukup kecil. Bagaimanapun juga dalam banyak kasus, hanya ada beberapa nilai dalam tabel (tabel terlalu banyak membutuhkan memori komputer) atau fungsi-fungsinya tidak linear (lihat gambar 2.3). Dalam gambar 2.3, kalau titik A dan B, B dan C dievaluasi memakai interpolasi linear mungkin hasilnya cukup akurat, karena A dan B linear. B dan C jangkauannya kecil. Tetapi dengan C dan D akan timbul simpangan yang besar. Untuk mendapatkan hasil pendekatan yang akurat dalam kasus-kasus semacam ini dapat digunakan interpolasi polinomial derajat tinggi.

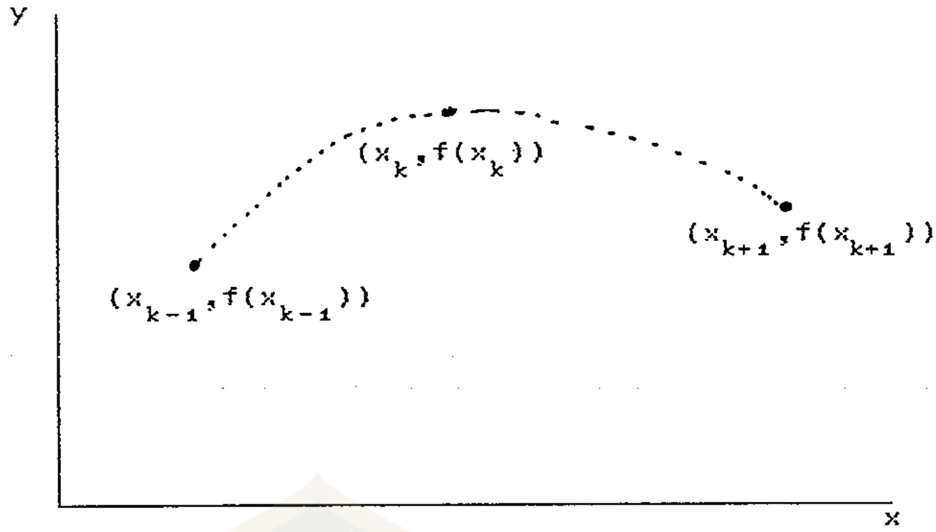
Kalau interpolasi linear dibutuhkan dua titik (x_k, $f(x_k)$) dan (x_{k+1}, $f(x_{k+1})$) dan sebuah garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut, maka dengan interpolasi polinomial derajat tinggi dapat diambil n titik; dan polinomial pangkat (n-1) yang melewati n titik tersebut.



Gambar 2.3

Grafik sebuah fungsi dari sebuah tabel yang kritis

Berikut akan dijelaskan Interpolasi Polinomial derajat dua yang merupakan salah satu Polinomial derajat tinggi, Dalam mendekati suatu fungsi dengan polinomial derajat dua dipilih tiga titik yaitu $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ dan $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ yang melewati kurvanya (lihat gambar 2.4).



Gambar 2.4.

Interpolasi polynomial derajat dua

Pemilihan ketiga titik tersebut boleh berubah-ubah dengan syarat nilai $\hat{x}$ (untuk mencari $f(\hat{x})$) harus lebih besar dari x terkecil yang dipilih dan lebih kecil dari x terbesar yang dipilih. Dalam gambar 2.4 dipilih

$$x_{k-1} \leq \hat{x} \leq x_k < x_{k+1}$$

Bentuk umum polinomial derajat 2 dalam x ditulis,

$$P(x) = a_2 \; x^2 + a_1 \; x + a_o \qquad \text{........(2.3)}$$

Sekarang dicari polinomial derajat dua yang lewat tiga titik $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ dan $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, sehingga didapat :

$$f(x_{k-1}) = a_2\ x_{k-1}^{2} + a_1\ x_{k-1} + a_o$$

$$f(x_k) \quad = a_2\ x_k^{2} + a_1\ x_k + a_o$$

$$f(x_{k+1}) = a_2\ x_{k+1} + a_1\ x_{k+1} + a_o$$

$$\ldots\ldots(2.4)$$

Tiga fungsi khusus di bawah ini akan dipakai untuk menyelesaikannya, yaitu :

$$\pi_{k-1}\ (x) \quad = (x - x_k)(x - x_{k+1})$$

$$\pi_k\ (x) \quad = (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \qquad \ldots\ldots(2.5)$$

$$\pi_{k+1}\ (x) \quad = (x - x_{k-1})(x - x_k)$$

Persamaan (2.5) ini adalah bentuk lain dari polinomial derajat dua dalam x. Dengan diasumsikan nilai x_k, x_{k-1} dan x_{k+1} berbeda didapat :

$$\pi_{k-1}\ (x_{k-1}) \neq 0$$

$$\pi_k\ (x_k) \neq 0 \qquad (2.6)$$

$$\pi_{k+1}\ (x_{k+1}) \neq 0$$

Sedangkan,

$$\pi_{k-1}\ (x_k) \quad = \pi_{k-1}\ (x_{k+1}) = 0$$

$$\pi_k\ (x_{k-1}) = \pi_k\ (x_{k+1}) \quad = 0 \qquad (2.7)$$

$$\pi_{k+1}\ (x_{k-1}) = \pi_{k+1}\ (x_k) \quad = 0$$

Kemudian P(x) dari (2.3) ditulis kembali dalam bentuk π_{k-1}, π_k dan π_{k+1}.

$$P(x) = b_{k-1}\ \pi_{k-1}(x) + b_k\ \pi_k(x) + b_{k+1}\pi_{k+1}(x) \qquad .....(2.8)$$

dengan b_{k-1}, b_k, b_{k+1} adalah tiga parameter yang dapat berubah.

Jika $x = x_{k-1}$ disubstitusikan dalam (2.8), kemudian dengan menggunakan (2.6) dan (2.7) akan didapat

$$b_{k-1} = \frac{f(x_{k-1})}{\pi_{k-1}(x_{k-1})}$$

Cara yang sama untuk $x = x_k$ dan $x = x_{k+1}$ didapat,

$$b_k = \frac{f(x_k)}{\pi_k(x_k)}$$

$$b_{k+1} = \frac{f(x_{k+1})}{\pi_{k+1}(x_{k+1})}$$

sehingga persamaan (2.8) menjadi,

$$P(x) = f(x_{k-1})\frac{\pi_{k-1}(x)}{\pi_{k-1}\ (x_{k-1})} + f(x_k)\frac{\pi_k\ (x)}{\pi_k\ (x_k)} + f(x_{k+1})\frac{\pi_{k+1}\ (x)}{\pi_{k+1}\ (x_{k+1})} \qquad ......(2.9)$$

atau dengan persamaan (2.5) persamaan (2.9) ditulis,

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = & \frac{(x - x_k)\ (x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)\ (x_{k-1} - x_{k+1})} f(x_{k-1}) \\ & + \frac{(x - x_{k-1})\ (x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})\ (x_k - x_{k+1})} f(x_k) \\ & + \frac{(x - x_{k-1})\ (x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})\ (x_{k+1} - x_k)} f(x_{k+1}) \end{aligned}}$$

.......(2.10)

Jadi persamaan polinomial derajat dua yang lewat tiga titik yang merupakan penyelesaian dari persamaan (2.4) dapat ditemukan dari persamaan (2.8), (2.9) dan (2.10).

Contoh :

Diberikan nilai-nilai suatu data dalam tabel 2.1, kemudian dicari fungsi pendekatan dari data-data tersebut.

Tabel 2.1. Data

x	y = f(x)
0	2
2	6
5	27

Misalkan urutan nilai x dari atas ke bawah berturut-turut adalah

x_{k-1}, x_k dan x_{k+1}

$$\Pi_{k-1}(x) = (x - 2)\ (x - 5)$$

$$\Pi_{k}\ (x) = (x - 0)\ (x - 5)$$

$$\Pi_{k+1}(x) = (x - 0)\ (x - 2)$$

dan

$$b_{k-1} = \frac{f(x_{k-1})}{\Pi_{k-1}(x_{k-1})}$$

$$= \frac{2}{(0-2)(0-5)}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$bk = \frac{f(x_{k})}{\Pi_{k}(x_{k})}$$

$$= \frac{6}{(2-0)(2-5)}$$

$$= -1$$

$$bk+1 = \frac{f(x_{k+1})}{\Pi_{k+1}(x_{k+1})}$$

$$= \frac{27}{(5-0)(5-2)}$$

$$= \frac{27}{15}$$

menggunakan persamaan (2.6) didapat,

$$P(x) = 1/5\ (x - 2)(x - 5) - x(x - 5) + 27/15\ x(x - 2)$$

$$= x^2 + 2$$

2.1.3. Interpolasi Lagrange

Salah satu metode untuk mencari fungsi pendekatan dari data yang ditabelkan dengan polinomial derajat tinggi adalah Interpolasi Lagrange.

Dalam Interpolasi Lagrange digunakan n data dan polinomial derajat (n-1) yang melalui n data tersebut. Pemilihan n nilai data x_i, i = 1,2, ...,n memakai patokan bahwa $\hat{x}$ lebih besar dari nilai x_i terkecil dan lebih kecil dari nilai x_i terbesar.

Misal f adalah fungsi yang diberikan dan diketahui nilainya di n data x_i, i = 1,2, ...,n. Ingin dicari suatu polinom p sedemikian sehingga p menginterpolasi f pada data x_i, i = 1,2, ...,n., artinya p memenuhi

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1,2, \ldots,n. \qquad \ldots..(2.11)$$

tinjau suatu polinom berderajat $\leq$ m yaitu

$$p_m(x) = a_o + a_1 x + \ldots.. + a_m x^m \qquad (2.12)$$

dengan a_o, a_1, ... ,a_m adalah konstanta-konstanta koefisien polinom. Jika polinom (2.12) menginterpolasi f di x_i, i = 1,2, ...,n. maka persamaan (2.11) akan memberikan polinom P sebanyak n, yang tiap-tiap polinom harus dipenuhi oleh m + 1 koefisien. Jadi diperoleh suatu sistem persamaan linier, yaitu :

$$\begin{array}{l} a_o + a_1x_1 + \ldots\ldots + a_m x_1^m = f(x_1) \\ a_o + a_1x_2 + \ldots\ldots + a_m x_2^m = f(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_o + a_1x_n + \ldots\ldots + a_m x_n^m = f(x_n) \end{array} \qquad ..(2.13)$$

Agar sistem persamaan linier diatas mempunyai penyelesaian maka banyaknya persamaan harus sama dengan jumlah bilangan yang tidak diketahui yakni a_o, a_1, ... ,a_m, jadi haruslah n = m + 1 atau m = n - 1. Jadi masalahnya sekarang adalah menentukan suatu polinom berderajat ≤ n-1 untuk menginterpolasi f di x_i, i = 1,2, ...,n.

Persamaan (2.13) ini mempunyai penyelesaian seperti penyelesaian yang digunakan untuk interpolasi polinomial derajat dua. Untuk itu digunakan n fungsi khusus yang merupakan polinomial derajat ke (n-1),

$$\begin{array}{l} \pi_1(x) = (x-x_2)\ (x-x_3)\ \ldots\ (x-x_n) \\ \pi_2(x) = (x-x_1)\ (x-x_3)\ \ldots\ (x-x_n) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \pi_k(x) = (x-x_1)\ \ldots\ (x-x_{k-1})\ (x-x_{k+1})\ldots(x-x_n) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \pi_n(x) = (x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots(x-x_{n-1}) \end{array}$$

dan lebih ringkas ditulis sebagai

$$\pi_i\ (x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.14)$$

dengan $\prod$ pada ruas kanan menandakan perkalian yang diulang-ulang.

Dari persamaan (2.14) untuk $x = x_i$ diperoleh,

$$\pi_i\ (x_i) \neq 0 \qquad \ldots\ldots.(2.15)$$

dan jika semua x_i berbeda didapat,

$$\pi_i\ (x_j) = 0 \ \text{ untuk } i \neq j \qquad \ldots\ldots.(2.16)$$

Kemudian P(x) ditulis lagi dalam bentuk π_1, π_2, ... π_n,

$$P(x) = b_1\ \pi_2(x) + b_2\pi_2(x) + \ldots + b_n\ \pi_n\ (x)$$

yang diringkas menjadi

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}\ b_i\ \pi_i(x) \qquad (2.17)$$

Ini adalah bentuk umum polinomial derajat (n-1) dalam bentuk Π dengan n parameter yang dapat berubah b_1, b_2, ..., b_n.

Jika $x = x_k$ disubstitusikan dalam (2.17) dan dengan menggunakan (2.15) dan (2.16) didapat,

$$P(x_k) = b_k\ \pi_k\ (x_k)$$

akibatnya semua suku dalam jumlahan dari (2.17) kecuali suku ke i akan lenyap. Padahal supaya dapat menyelesaikan persamaan (2.13) haruslah,

$$f(x_k) = P(x_k)$$

sehingga

$$b_k = \frac{f(x_k)}{\pi_k(x_k)} \qquad \text{untuk } k = 1,2,\ldots,n$$

Karena itu (2.17) menjadi,

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\frac{\pi_i\ (x)}{\pi_i\ (x_i)}} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.18)$$

Jika $L_i(x) = \dfrac{\pi_i\ (x)}{\pi_i\ (x_i)}$

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ L_i(x)} \qquad \ldots\ldots(2.19)$$

untuk j = 1,2,3, ...,n , maka

$$L_i(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } j = i \\ 0 \text{ untuk } j \neq i \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.20)$$

atau dengan bentuk (2.14), bentuk (2.18) dapat ditulis,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j) \right) \quad \ldots.(2.21)$$

atau

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.22)$$

Bentuk-bentuk persamaan (2.18), (2.19) dan (2.21) disebut Rumus Interpolasi Lagrange, dan proses yang digunakan rumus ini disebut Interpolasi Lagrange.

2.2. Konsep Dasar Komputer Grafik

Salah satu konsep dalam komputer grafik adalah permodelan dari suatu obyek atau gambar. Dengan permodelan ini dapat memberikan gambaran dari suatu obyek atau gambar dalam komputer yang akhirnya menghasilkan visual display.

Salah satu cara untuk membuat permodelan dari suatu obyek atau gambar adalah dengan menggunakan persamaan geometrik yang cukup mudah diterapkan pada komputer tetapi cukup flexibel untuk mewakili variasi bentuk dari suatu obyek.

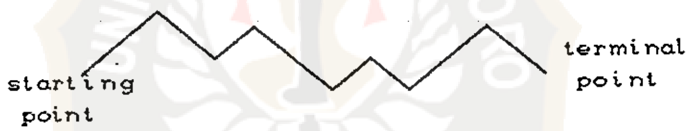
Persamaan Geometrik yang dapat digunakan mulai dari titik, segmen garis, polyline, polygon dan polyhedron serta persamaan geometrik yang lebih kompleks seperti kurva, permukaaan kurva.

2.2.1. Titik dan Garis

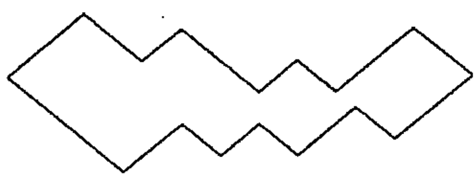
Titik dan garis adalah dasar untuk membuat obyek pada komputer grafik, Titik ditentukan dari koordinat baik dalam dua dimensi maupun tiga dimensi. Segmen garis ditentukan adanya titik ujung dan titik pangkal yang terhubung misal $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

2.2.2. Polyline

Polyline adalah rangkaian segmen garis yang terhubung, polyline ini mempunyai initial (starting point) dan mempunyai final (terminal point).



Polyline yang tertutup disebut Poligon, Yaitu yang Initial dan Finalnya berhimpit.



2.2.3. Desain kurva

Diberikan n + 1 titik data misal $P_0(x_0, y_0)$ ..... $P_n(x_n, y_n)$. Kita berharap dapat menemukan kurvanyayang tepat melewati titi-titik tersebut. Bila kita menginginkan kurva yang melewati semua titik akan dihadapkan dengan persoalan Interpolasi dan bila hanya memerlukan kurva yang mendekati dari titik-titik itu, kita dihadapkan dengan masalah aproksimasi.

Biasanya untuk memecahkan masalah desain kurva, diatasi dengan jalan membentuk bagian-bagian kecil kurva atau segmen kurva. Misal kurva f(x) dibentuk dari beberapa segmen kurva, dicoba untuk mewakili kurva dengan jumlahan atau sigma dari segmen-segmen kurva $Q_i(x)$ inilah yang disebut Fungsi Basis atau Fungsi Blending.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \; Q_i(x)$$

Fungsi Blending tersebut dapat dipilih, tetapi yang sering dipakai atau yang digunakan adalah fungsi polinomial. polinomial derajat n dengan bentuk :

$$Q(x) = a_n \; x^n + a_{n-1} \; x^{n-1} + \; . \; . \; . + a_1 x + a_0$$

Dalam Tugas Akhir ini akan dipilh fungsi blending dengan menggunakan rumus Interpolasi Lagrange dalam parameter yang merupakan salah satu bentuk fungsi polinomial.

2.3. Algorithma

Algorithma adalah bagian yang terdiri dari tahap-tahap atau langkah-langkah urutan instruksi yang menggambarkan dengan jelas penyelesaian suatu persoalan sehingga langkah awal sampai akhir dari penyelesaian tersebut akan mudah dimengerti.

Suatu algorithma yang baik adalah yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Banyak langkah instruksi yang terbatas, tidak banyak dan tidak mengulang-ulang perintah yang telah ada sebelumnya.
2. Jelas, penuliasan dari setiap langkah yang terdapat dalam sebuah algorithma harus memiliki arti yang khusus dan jelas, tidak mendua arti.
3. Batasan dari rangkaian proses harus pasti, sehingga alur dari algorithma mudah dimengerti.
4. Efektif, instruksi yang diberikan harus dapat dikerjakan walaupun dengan perintah yang singkat.

Biasanya algorithma ini digunakan pada penyelesaian permasalahan pemrograman komputer dan untuk mendekatkan pada penyelesaian program sesungguhnya pada komputer, maka algorithma ada yang berbentuk pseudocode yang dekat sekali dengan bahasa pemrograman.

Contoh :

Algorithma berikut digunakan untuk menghitung total dari 10 bilangan yang diinputkan dan mencetak totalnya.

```
Begin
    Total ← 0;
    For i = 1 to 10 do
    Begin
        A ← (input);
```

```
            Total ← Total + A;
        End;
    Output (Total);
    Return;
    End;
```

Keterangan :

- algorithma diawali dengan Begin dan diakhiri dengan Return dan End;
- pernyataan penugasan atau pemberian nilai ke suatu variabel ditulis dengan tanda ←, artinya nilai yang disebelah kanan tanda ← diberikan pada variabel yang ada dikanan tanda ←.
- kata Input artinya masukkan pengguna algorithma.
- kata Output artinya cetakkan sesuai dari alur instruksi algorithma.